Chapitre 8

Limite, continuité

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre :

- I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non singleton.
- a désigne un point de I ou une extrémité de I (éventuellement infinie).

Par exemple, si $I = [1, +\infty[$, alors a désigne un point de $[1, +\infty[\cup \{+\infty\}$.
Si $I =]0, 2[$, alors a désigne un point de $[0, 2]$.
On peut donc avoir $a \notin I$. Par contre, on notera que si $a \in I$, alors a est fini.

1 Limite d'une fonction

1.1 Notion de voisinage

On considère une propriété $\mathcal{P}$ susceptible d'être vérifiée ou non par une fonction. Par exemple $\mathcal{P}$ peut être "f est croissante" ou "f est bornée".

Définition 8.1

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et J un sous-ensemble de I. On dit que <u>f vérifie $\mathcal{P}$ sur J</u> si la restriction $f|_J$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

Exemple 1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}_-^*$, mais pas sur $\mathbb{R}^*$.

Définition 8.2

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Si $+\infty$ est une extrémité de I, on dit que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ <u>au voisinage de $+\infty$</u> s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que f vérifie $\mathcal{P}$ sur $I \cap [M, +\infty[$.
- Si $-\infty$ est une extrémité de I, on dit que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ <u>au voisinage de $-\infty$</u> s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que f vérifie $\mathcal{P}$ sur $I \cap]-\infty, M]$.
- Si a n'est pas infini, on dit que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ <u>au voisinage de a</u> s'il existe $\eta > 0$ tel que f vérifie $\mathcal{P}$ sur $I \cap [a-\eta, a+\eta]$.

Exemple 2.

1. ln est positive au voisinage de $+\infty$.
2. Pour tout $a \in]1, +\infty[$, ln est strictement positive au voisinage de a.
3. cos n'est pas croissante au voisinage de $+\infty$.

1.2 Limite finie en un point ou en $\pm\infty$

Définition 8.3 (Limite finie en $\pm\infty$)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $\ell \in \mathbb{R}$.

- Si $+\infty$ est une extrémité de I, on dit que <u>$f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$</u> si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad (x \geq M \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

  On note alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.

- Si $-\infty$ est une extrémité de I, on dit que <u>$f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $-\infty$</u> si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad (x \leq M \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

  On note alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \ell$.

On dit parfois aussi "f tend vers ℓ en $+\infty$" (noter que les deux "x" ont disparu).

Exemple 3. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ tend vers 0 en $+\infty$.

Définition 8.4 (Limite finie en $a \in \mathbb{R}$)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose a *fini*. On dit que <u>$f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a</u> si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \quad (|x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

On note alors $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

On dit aussi "f tend vers ℓ en a".

Exemple 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$.

Remarque. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Que a soit fini ou infini, on a :

- $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, la propriété $\mathcal{P}_\varepsilon$: $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ est vraie au voisinage de a.
- $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si $|f(x) - \ell| \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

Proposition 8.5

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f a une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Démonstration. On fait la preuve uniquement lorsque a est fini.

□

1.3 Limite infinie en un point ou en $\pm\infty$

Définition 8.6 (Limite infinie en $\pm\infty$)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que...

	($+\infty$ doit être une extrémité de I)	($-\infty$ doit être une extrémité de I)
	x tend vers $+\infty$ si...	x tend vers $-\infty$ si...
	$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists B \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I$	
$f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque...	$(x \geq B \implies f(x) \geq A)$	$(x \leq B \implies f(x) \geq A)$
$f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque...	$(x \geq B \implies f(x) \leq A)$	$(x \leq B \implies f(x) \leq A)$

On écrit selon les cas $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ ou $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$.

Par exemple, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists B \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad (x \geq B \implies f(x) \geq A)$$

On remarquera qu'on peut remplacer "$\forall A \in \mathbb{R}$" par "$\forall A \in \mathbb{R}_+$" sans changer la valeur de vérité de cette proposition : si $f(x) \geq A$ pour tout $A \in \mathbb{R}$, alors a fortiori $f(x) \geq A$ pour tout $A \geq 0$.

Exemple 5. On a $\sqrt{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Définition 8.7 (Limite infinie en $a \in \mathbb{R}$)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose a *fini*. On dit que...

- $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a si :

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \quad (|x-a| \leq \eta \implies f(x) \geq A)$$

  On note alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.

- $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a si :

$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \quad (|x-a| \leq \eta \implies f(x) \leq A)$$

  On note alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$.

Exemple 6. On a $\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$.

Remarque. Que a soit fini ou infini, on a :

- $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ si et seulement si, pour tout $A \in \mathbb{R}$, la propriété $\mathcal{P}_A : f(x) \geq A$ est vraie au voisinage de a.
- Si f a une limite infinie en a, alors f n'est pas bornée au voisinage de a.

Proposition 8.8 (Unicité de la limite)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, a fini ou infini. Pour tous $\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, si

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_1 \qquad \text{et} \qquad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_2$$

alors $\ell_1 = \ell_2$. Autrement dit **la** limite de f en a, si elle existe, est unique.

Démonstration. On ne fait la preuve que pour le cas $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ et a fini.

□

Cette proposition justifie, lorsque la limite existe, l'écriture "$\lim_{x \to a} f(x)$" : cela ne correspond qu'à une seule et unique valeur (dans $\overline{\mathbb{R}}$).

1.4 Propriété des limites

Caractérisation séquentielle

Théorème 8.9 (Caractérisation séquentielle de la limite)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

(ii) Pour toute suite (x_n) à valeurs dans I, si $x_n \to a$, alors $f(x_n) \to \ell$.

Démonstration. On ne fait la preuve que pour le cas $a, \ell \in \mathbb{R}$.

□

Le théorème précédent est très utile pour montrer la *non-existence* d'une limite : il suffit de trouver deux suites $(x_n), (y_n)$ à valeurs dans I qui tendent vers a mais de sorte que les expressions $f(x_n)$ et $f(y_n)$ n'ont pas la même limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exemple 7.

1. Montrer que cos n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. Montrer que $f : x \mapsto \lfloor -x^2 \rfloor$ n'a pas de limite en 0.

1. Supposons par l'absurde que cos admette une limite, notée ℓ, en $+\infty$. Alors pour toute suite (x_n) telle que $x_n \to +\infty$, on a $\cos(x_n) \to \ell$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2n\pi \to +\infty \quad \text{et} \quad \cos(2n\pi) = 1 \to 1$$

$$3n\pi \to +\infty \quad \text{et} \quad \cos(3n\pi) = -1 \to -1$$

Ainsi, $1 = \ell = -1$. Contradiction. Ainsi, cos n'a pas de limite en $+\infty$.

Passage à la limite

Théorème 8.10 (Passage à la limite)

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$. Si $f \leq g$ au voisinage de a, et si f, g admettent des limites en a, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$$

Démonstration. Soit $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers a. Alors, (par la caractérisation séquentielle d'une limite)

$$\lim f(x_n) = \lim_{x\to a} f(x) \qquad \text{et} \qquad \lim g(x_n) = \lim_{x\to a} g(x)$$

Or, à partir d'un certain rang, on peut montrer que $f(x_n) \leq g(x_n)$ donc en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$:

$$\lim f(x_n) \leq \lim g(x_n)$$

ce qui donne le résultat voulu avec les égalités ci-dessus. □

Remarque. En particulier, si on peut trouver $g : I \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in I \quad |f(x) - \ell| \leq g(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Remarque.

- Comme pour les suites, il est indispensable que f et g admettent des limites avant de passer à la limite.
- Attention en passant à la limite les inégalités deviennent larges : si $f(x) < g(x)$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$.
- Il n'est pas nécessaire que $f \leq g$ soit vrai partout : il suffit que cela soit vrai au voisinage de a :
  - si a est fini, il suffit que $f \leq g$ sur $I \cap]a - r, a + r[$ avec $r > 0$ aussi petit qu'on veut.
  - Si $a = +\infty$, il suffit que $f \leq g$ sur $I \cap [M, +\infty[$ avec $M \in \mathbb{R}$ aussi grand qu'on veut.

Résultats d'existences de limites

Théorème 8.11 (Théorème d'encadrement)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions qui tendent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$f \leq g \leq h \qquad \text{au voisinage de } a$$

alors g admet une limite en a et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$

Démonstration. On ne fait la démonstration que pour $a \in \mathbb{R}$ fini. Soit une suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a. Montrons que, à partir d'un certain rang, on a

$$f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$$

Comme $f \leq g \leq h$ au voisinage de a, alors il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \in [a - r, a + r] \qquad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Or, comme $x_n \to a$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $|x_n - a| \leq r$, càd $x_n \in [a - r, a + r]$. Ainsi,

$$\forall n \geq N \qquad f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)$$

Or, par la caractérisation séquentielle,

$$f(x_n) \to \ell \qquad \text{et} \qquad h(x_n) \to \ell$$

Donc, par le théorème d'encadrement des suites, on en déduit que $g(x_n) \to \ell$. Ainsi, pour toute suite (x_n) qui tend vers a, on a $g(x_n) \to \ell$. Par la caractérisation séquentielle, on en déduit $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$. $\square$

Comme pour les suites, le principal intérêt de ce théorème est de montrer que g admet une limite.

Méthode (Trouver une limite par une majoration)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Si on trouve une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$,

$$|f(x) - \ell| \leq g(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.
Note : g n'a pas besoin d'être définie sur tout I : il suffit qu'elle soit définie au voisinage de a.

Enfin, pour montrer l'existence qu'une limite est infinie, il suffit d'avoir une majoration ou une minoration "dans le bon sens" :

Proposition 8.12

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions vérifiant $f \leq g$ au voisinage de a

- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

1.5 Opérations sur les limites

On rappelle que les formes indéterminées sont :

$$+\infty - \infty \qquad 0 \times \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 1^{\infty} \qquad 0^0 \qquad \infty^0$$

Somme et produit

Proposition 8.13 (Somme et produit de limites)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \textbf{et} \qquad g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$$

Alors, **à condition que cela ne donne pas une forme indéterminée**,

$$f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell + \ell'$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \lambda \ell$$

$$f(x)g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell\ell'$$

Démonstration. On prouve uniquement le résultat pour le produit fg.

□

Proposition 8.14

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ et g est bornée au voisinage de a. Alors $f(x)g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

Démonstration. Idem, par la caracatérisation séquentielle. □

Inverse et quotient

On peut montrer que si

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$$

alors $f(x) \neq 0$ au voisinage de a. Donc la fonction $\dfrac{1}{f}$ est bien définie au voisinage de a.

Proposition 8.15 (Limite de l'inverse)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\ell}$.
2. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \pm\infty$, alors $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
3. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ et $f(x) > 0$ au voisinage de a, alors $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$.
4. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ et $f(x) < 0$ au voisinage de a, alors $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$.
5. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ et $f(x) \neq 0$ au voisinage de a, mais que les cas 3 et 4 ne sont pas vérifiés, alors $\dfrac{1}{f}$ n'a pas de limite en a.

Démonstration. Idem, par la caracatérisation séquentielle. □

Un quotient de fonctions peut se réécrire comme un produit et un inverse : $\dfrac{f}{g} = f \times \dfrac{1}{g}$ et on peut ainsi déduire la limite de $\dfrac{f}{g}$ selon les cas.

Composition

Théorème 8.16 (Composition de limites)

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non singleton. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit enfin $b \in \overline{\mathbb{R}}$ un point de J ou une extrémité de J, éventuellement infinie. Alors

$$\begin{cases} f(I) \subset J \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{y\to b} g(y) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases} \implies \lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = \ell$$

Démonstration. Idem, par la caracatérisation séquentielle. □

1.6 Limite à gauche, limite à droite

On définit une nouvelle notion de limite, qui ne s'applique qu'en des points a finis.

Définition 8.17 (Limite à gauche, limite à droite)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose a fini.

- On suppose que $a \neq \sup(I)$, càd a n'est pas l'extrémité supérieure de I. Si la fonction

$$f|_{I\cap]a,+\infty[}$$

admet une limite en a, on l'appelle la limite à droite de f en a. On la note

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) \qquad \text{ou} \qquad f(a^+)$$

- On suppose que $a \neq \inf(I)$, càd a n'est pas l'extrémité inférieure de I. Si la fonction

$$f|_{I\cap]-\infty,a[}$$

admet une limite en a, on l'appelle la limite à gauche de f en a. On la note

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \qquad \text{ou} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) \qquad \text{ou} \qquad f(a^-)$$

Si a est l'extrémité supérieure de I, alors f ne peut avoir de limite à droite en a : en effet $I\cap]a,+\infty[=\varnothing$ et cet ensemble ne vérifie pas les hypothèses pour qu'on puisse parler de limite (intervalle non vide, non singleton).

Exemple 8.

- On a $\lim\limits_{x\to 0^-} \lfloor x\rfloor = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \lfloor x\rfloor = 0$.
- La fonction ln n'admet pas de limite à gauche en 0, mais $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.
- On a $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ (avec $I=\mathbb{R}_-^*$) et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ (avec $I=\mathbb{R}_+^*$).

Remarque. Lorsque $a=\inf(I)$, la limite à droite de f en a coïncide avec la limite "habituelle". Par exemple

$$\lim_{x\to 0} \ln x = \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

On peut donc omettre de préciser a^+ et juste mettre a. Idem si $a=\sup(I)$.

Remarque. Si f admet une limite en un point a (fini), alors elle admet une limite à gauche (si $a\neq\inf(I)$) et une limite à droite (si $a\neq\sup(I)$), et toutes ces limites sont égales. La réciproque est fausse :

$$\lim_{x\to 0^+} \left\lfloor -x^2\right\rfloor = -1 = \lim_{x\to 0^-} \left\lfloor -x^2\right\rfloor$$

et pourtant $x\mapsto \left\lfloor -x^2\right\rfloor$ n'a pas de limite en 0 (cf Exemple 7).

1.7 Théorème de la limite monotone (fonctions)

Théorème 8.18 (Théorème de la limite monotone)

Soient $\alpha,\beta\in\overline{\mathbb{R}}$ avec $\alpha<\beta$. Soit $f:]\alpha,\beta[\to\mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors

1. Pour tout $a\in]\alpha,\beta[$, f admet des limites *finies* à gauche et à droite en a. De plus,

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x\to a^+} f(x) \qquad \text{si } f \text{ est croissante}$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x\to a^-} f(x) \qquad \text{si } f \text{ est décroissante}$$

2. f admet une limite en β :
   - Si f est croissante, ou bien elle est non majorée et $\lim\limits_{x\to\beta} f(x) = +\infty$, ou bien elle est majorée et $\lim\limits_{x\to\beta} f(x) = \sup\{f(t) \mid \alpha<t<\beta\}$.

- Si f est décroissante, ou bien elle est non minorée et $\lim_{x\to\beta} f(x) = -\infty$, ou bien elle est minorée et $\lim_{x\to\beta} f(x) = \inf\{f(t) \mid \alpha < t < \beta\}$.

3. f admet une limite en α (et on peut adapter les points ci-dessus).

Démonstration.

□

2 Continuité en un point

2.1 Introduction

Définition 8.19 (Continuité en un point)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que $a \in I$ (donc a est fini et f est définie en a).

- On dit que f est continue en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, càd

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \qquad |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

- Sinon, on dit que f est discontinue en a.

Attention : la notion de continuité n'a de sens qu'en un point où f est définie (donc dans I).

Remarque. Si f admet une limite en $a \in I$, alors nécessairement $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, càd f est continue en a. On montre que $\lim_{x \to a} f(x)$ est forcément égal à $f(a)$ avec la caractérisation séquentielle et la suite de terme général $x_n = a$.

Exemple 9. Montrer que la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en tout $a \in \mathbb{R}$.

Théorème 8.20 (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est continue en a.
- Pour toute suite (x_n) à valeurs dans I, si $x_n \to a$, alors $f(x_n) \to f(a)$.

A nouveau, cette caractérisation permet surtout de montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point.

Exemple 10. La fonction $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ n'est pas continue en 0.

2.2 Continuité à droite, à gauche

Définition 8.21 (Continuité à gauche, à droite)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose $a \in I$.

- On suppose que $a \neq \sup(I)$. On dit que f est continue à droite en a si la fonction $f|_{I \cap [a, +\infty[}$ est continue en a, c'est-à-dire si
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$
- On suppose que $a \neq \inf(I)$. On dit que f est continue à gauche en a si la fonction $f|_{I \cap]-\infty, a]}$ est continue en a, c'est-à-dire si
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Exemple 11. La fonction $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue à droite en 0, mais pas à gauche.

Proposition 8.22

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose $a \in I$. Alors f est continue en a si et seulement si f est continue à gauche en a (si $a \neq \inf(I)$) et à droite en a (si $a \neq \sup(I)$) .

2.3 Prolongement par continuité

Dans cette section, on va supposer que $a \in I$ et considérer des fonctions définies sur $I \setminus \{a\}$.

On peut distinguer deux cas :

- a est une extrémité de I, par exemple

$$g : x \mapsto x^x \quad \text{est définie sur } I \setminus \{a\} \text{ avec } \quad I = \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad a = 0$$

- a n'est pas une extrémité de I, par exemple

$$h : x \mapsto \frac{\sin x}{x} \quad \text{est définie sur } I \setminus \{a\} \text{ avec } \quad I = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad a = 0$$

Les fonctions g est h ne sont pas continues en 0 car elles ne sont pas définies en 0. Néanmoins, comme leur limite en 0 sera finie, on va pouvoir les prolonger en des fonctions continues définies sur I tout entier. Pour g, la limite (à droite) 0 a un sens, mais pour parler de la limite en 0 de h, il faut qu'on étende la notion de limite :

Définition 8.23 (Limite en un "trou")

Soit $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que a n'est pas une extrémité de I.

On dit que f admet une limite en a si elle admet une limite à gauche et à droite en a, et que ces limites sont égales. On pose alors

$$\lim_{x \to a} f(x) := \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Toutes les propriétés des limites qu'on a déjà vues s'étendent à ce nouveau cadre de limite.

Définition 8.24 (Prolongement par continuité)

Soit $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f admet en a une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que f est <u>prolongeable par continuité en a</u>. Dans ce cas, l'application

$$\begin{aligned} \tilde{f} : & I \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \setminus \{a\} \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases} \end{aligned}$$

est continue en a, et est appelée le <u>prolongement par continuité de f en a</u>.

Exemple 12. Montrer que les fonctions $g : x \mapsto x^x$ et $h : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ sont prolongeables par continuité en 0.

2.4 Limite épointée

Définition 8.25 (Limite épointée)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f admet une limite épointée en a si $f|_{I \setminus \{a\}}$ admet une limite en a. On la note

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) := \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Si a est une extrémité de I, alors il se peut que seulement une de ces limites est définie.

La différence cruciale est ici que f est définie en a.

Remarque. Si f admet une limite en a, alors f admet une limite épointée en a (et ces limites sont égales). La réciproque est fausse :

Exemple 13. $f : x \mapsto \lfloor -x^2 \rfloor$ vérifie $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = -1$. Par contre, f n'admet pas de limite en 0.

3 Continuité sur un intervalle

3.1 Introduction

Définition 8.26

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est continue (sur I) si f est continue en tout point de I.
On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, ou parfois juste $\mathcal{C}(I)$, l'ensemble des fonctions réelles continues sur I.

Exemple 14. La fonction $1_{\mathbb{R}_+}$ n'est pas continue (sur $\mathbb{R}$). En revanche, sa restriction à $\mathbb{R}_+$ est continue (sur $\mathbb{R}_+$).

Remarque. Si $f \in \mathcal{C}(I)$, et si $J \subset I$ est un intervalle non vide, non singleton, alors $f \in \mathcal{C}(J)$.

Par abus de langage, pour une partie $X \subset \mathbb{R}$ quelconque on dit parfois que f est continue (sur X) si f est continue en chaque point de X.

Exemple 15. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Exemple 16. La fonction tan est continue sur $D_{tan} = \mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

3.2 Opérations et continuité

Proposition 8.27 (Somme, produit, inverse et continuité)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si f et g sont continues en a (resp. sur I), alors $f+g$, λf et fg sont continues en a (resp. sur I).
- Si f et g sont continues en a (resp. sur I), et si g ne s'annule pas en a (resp. sur I), alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continues en a (resp. sur I).

Proposition 8.28 (Composition et continuité)

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non singleton. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que

1. $f(I) \subset J$.
2. f est continue en a (resp. sur I).
3. g est continue en $f(a)$ (resp. sur J).

Alors $g \circ f$ est continue en a (resp. sur I).

Exemple 17. Si f est continue sur I, alors e^f, $|f|$ et f^2 sont continues sur I.

3.3 Image d'un intervalle

Théorème 8.29 (TVI : Théorème des Valeurs Intermédiaires)

Soit $f \in \mathcal{C}(I)$. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Alors pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a,b]$ tel que $y = f(x)$.

Démonstration.

□

Corollaire 8.30

Avec les mêmes hypothèses, si de plus f est strictement monotone, alors l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in [a,b]$ admet une unique solution.

Exemple 18. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel positif x_n tel que $x_n^4 + 4x_n - n = 0$.

Corollaire 8.31

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Ce corollaire montre une partie du théorème de la bijection !

Corollaire 8.32

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et ne s'annule pas sur I, alors f a le même signe (strict) sur I.

3.4 Image d'un segment

Théorème 8.33 (Théorème des bornes atteintes)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.

f atteint ses bornes signifie que f atteint son minimum et son maximum sur $[a,b]$. On note d'ailleurs, *lorsque cela a un sens* :

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) := \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\} = \sup f([a,b]) \qquad \inf_{x\in[a,b]} f(x) := \inf f([a,b])$$

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) := \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\} = \max f([a,b]) \qquad \min_{x\in[a,b]} f(x) := \min f([a,b])$$

Démonstration.

□

Corollaire 8.34

Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors l'image par f du segment $[a,b]$ est un segment :

$$f([a,b]) = [m,M] \qquad \text{avec} \qquad m = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \text{et} \qquad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

3.5 Théorème de la bijection

Théorème 8.35

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est injective si et seulement si f est strictement monotone.

Démonstration. Admise (non exigible). □

Théorème 8.36 (Théorème de la bijection, le retour)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Alors :

1. $f(I)$ est un intervalle.
2. f réalise une bijection de I sur $f(I)$
3. $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue et a la même monotonie (stricte) que f.

Démonstration. Admise (non exigible). □

4 Fonctions complexes

La notion de limite s'étend facilement aux fonctions $f : I \to \mathbb{C}$. Il suffit de remplacer la valeur absolue par le module :

Définition 8.37 (Limite finie)

Soient $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que <u>$f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a</u> si $|f(x) - \ell| \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$:

- Si a est fini :
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \quad (|x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$
- Si $a = +\infty$:
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad (x \geq M \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$
- Si $a = -\infty$:
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad (x \leq M \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

On note à nouveau $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

Définition 8.38 (Continuité)

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On suppose que $a \in I$. On dit que f est <u>continue en a</u> si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
On dit que f est <u>continue sur I</u> si f est continue en chaque point de I.

Remarque. Topo rapide sur ce qui est conservé (ou pas) avec des fonctions complexes :

- L'unicité de la limite (finie) est là encore garantie.
- Attention : il n'y a pas de notion de “tendre vers $+\infty$” (ou $-\infty$).
- Les caractérisations séquentielles (limite et continuité) sont valables, avec le même énoncé.
- Les opérations somme, produit, inverse et quotient sur les limites et la continuité restent vraies. Pour la composée $g \circ f$, les hypothèses sont $f : I \to \boxed{\mathbb{R}}$ et $g : J \to \mathbb{C}$ avec J un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 8.39

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction.

- f admet une limite (finie) en a si et seulement si $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ admettent des limites finies en a, et dans ce cas
$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \mathrm{Re}(f(x)) + i \lim_{x \to a} \mathrm{Im}(f(x))$$
- f est continue en a (resp. sur I) si et seulement si $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont continues en a (resp. sur I).